



02

문제 분해와 모델링

- + 학습 목표**
 - 복잡한 문제를 해결 가능한 작은 단위의 문제로 분해할 수 있다.
 - 문제를 분석하고 분해한 결과를 바탕으로 모델링할 수 있다.
- + 학습 요소**
 - 문제 분해, 모델링

생각 깨우기

가족 여행을 계획하는 문제를 쉽게 해결할 수 있는 방법을 생각해 보자.

우리 주변에서 마주하는 수많은 문제 중에는 간단하게 해결할 수 있는 단순한 문제도 있지만, 한 번에 해결할 수 없는 복잡한 문제인 경우도 있다.



한 번에 해결할 수 없는 복잡한 문제를 분해하여 해결하면 좋은 점은 무엇일까?

1 | 문제 분해

한 번에 해결하기 어려운 복잡한 문제는 어떻게 해결할 수 있을까? 가족 여행을 계획하는 문제는 여행지 결정하기, 교통수단 확인하기, 숙소 예약하기, 식당 검색하기 등의 작은 문제들로 구성되며 각각의 문제를 해결하고 그 결과를 종합하면 처음 설정한 문제인 ‘가족 여행 계획하기’를 해결할 수 있다. 이처럼 복잡한 문제는 작은 단위의 문제들로 분해할 수 있으며, 이를 문제 분해라고 한다.

예제 1 퍼즐을 맞추는 문제를 풀면서 문제를 분해하여 해결하는 방법을 살펴보자.

방법 ①

퍼즐 조각을 비슷한 색으로 구성된 하늘, 나무, 꽃 등의 요소로 나누어 퍼즐을 맞추며 그림을 완성한다.

작은 요소로 분해하기



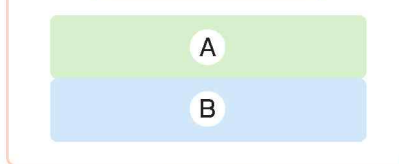
요소별로 맞추기



방법 ②

그림을 A와 B 두 영역으로 분해하여 각 영역별 동일한 형태의 퍼즐 조각을 맞추며 그림을 완성한다.

A와 B 영역으로 분해하기



영역별로 맞추기



👉 풀이

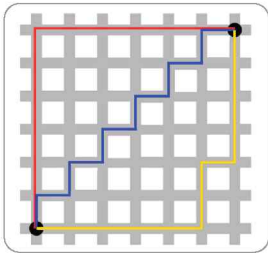
복잡한 문제는 **방법 ①**과 같이 유사한 기능이나 자료를 기준으로 분해한 뒤 기능별로 순차적으로 처리하며 해결하거나, **방법 ②**와 같이 동일한 형태의 작은 문제로 분해하여 이를 반복적으로 해결함으로써 원래의 문제를 해결할 수 있다. 작은 문제들을 해결하고 그 결과를 종합하여 처음에 해결하고자 했던 복잡한 문제를 해결하는 것이다. 이때 문제 사이의 순서나 포함 관계에 유의해야 하며, 작은 문제를 모두 수행했을 때 해결하려던 전체 문제가 오류 없이 해결되었는지 확인해야 한다.

예제 문제를 해결하기 위해 제시된 방법 이외에 또 어떤 방법으로 문제를 분해할 수 있을까요?



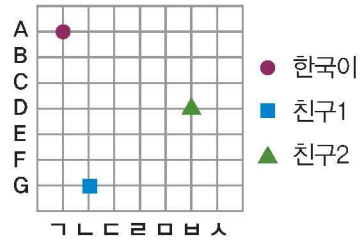
Tip 맨해튼 거리(Manhattan Distance)

두 점 사이의 거리를 수평 거리와 수직 거리의 합으로 계산하는 방법으로, 뉴욕 맨해튼의 바둑판 모양 도로에서 실제로 이동해야 하는 거리와 비슷하다고 해서 붙여진 이름이다. 두 점 $A(x_1, y_1)$ 와 $B(x_2, y_2)$ 사이의 맨해튼 거리는 $|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ 으로 구할 수 있다.



예제 2 다음 문제를 작은 단위의 문제로 분해해 보자.

문제 상황 한국이는 친구1, 친구2와 약속 장소를 정하고 있다. 다음은 세 학생의 출발 지점을 도식화하여 나타낸 그림이다. 한국이는 (ㄱ, A), 친구1은 (ㄴ, G), 친구2는 (ㄷ, D)에서 출발할 때, 세 학생이 이동한 거리의 총합이 최소가 되려면 약속 장소를 어느 위치로 정해야 할까?



풀이 문제 분해를 통해 복잡해 보이는 문제를 다음과 같이 작은 문제로 나눌 수 있다.

분해 방법 1 | 학생별로 분해하기

- 작은 문제 1: 모든 좌표에 대한 한국이의 이동 거리를 구하는 문제
- 작은 문제 2: 모든 좌표에 대한 친구1의 이동 거리를 구하는 문제
- 작은 문제 3: 모든 좌표에 대한 친구2의 이동 거리를 구하는 문제
- 작은 문제 4: 모든 좌표에 대한 세 학생의 이동 거리의 총합을 구하는 문제

분해 방법 2 | 구조가 동일한 작은 문제로 분해하기

- 작은 문제 1: 가로 방향에서 한국이, 친구1, 친구2의 이동 거리의 합이 최소가 되는 지점을 구하는 문제
- 작은 문제 2: 세로 방향에서 한국이, 친구1, 친구2의 이동 거리의 합이 최소가 되는 지점을 구하는 문제
- 작은 문제 3: 가로, 세로 방향에서 각각 이동 거리의 합이 최소가 되는 지점이 만나는 위치를 구하는 문제

해 보기 1 문제 분해하기

다음 문제 상황을 작은 단위의 문제로 분해하여 적어 보자.

문제 상황 한국이 학교 앞 정류장에 정차하는 버스 A, B, C의 배차 간격은 각각 8분, 9분, 12분이다. 버스 A, B, C가 동시에 정류장에서 출발한 이후 처음으로 다시 3대의 버스가 동시에 출발하는 것은 몇 분 후일까?



2 | 모델링

복잡한 문제를 분해한 결과로 여러 개의 작은 문제들이 남게 되는데 이러한 작은 문제들 사이의 관계를 표현하여 문제 해결을 위한 모델을 만들 수 있다. 글, 그림, 그래프, 표 등을 사용하여 작은 문제 사이의 관계를 구조화해 복잡한 문제를 이해하기 쉬운 형태로 나타내는 것을 모델링이라고 한다. 모델링의 결과로 만들어진 모델은 복잡한 문제가 어떤 작은 문제들로 구성되어 있는지, 작은 문제들 사이에 어떤 관계가 있는지를 나타내기 때문에 복잡한 문제를 좀 더 단순하게 표현할 수 있다.

정보의 구조화

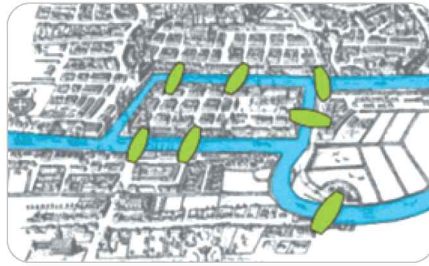
다양한 정보를 성격과 특징에 맞게 분류하고 체계적으로 표현하는 것으로, 모델링의 한 방법이다.

퀴니히스베르크의 다리 건너기

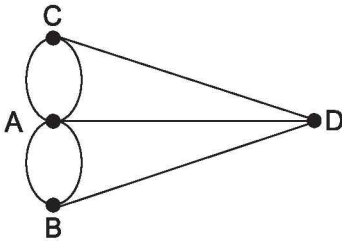
글

퀴니히스베르크에는 프레겔 강이 흐르고 있으며, 두 개의 큰 섬과 나머지 도시를 연결하기 위한 7개의 다리가 있다. 왼쪽 섬에는 위로 연결되는 두 개, 아래로 연결되는 두 개, 오른쪽 섬과 연결되는 한 개의 다리가 있고, 오른쪽 섬에는 위로 연결되는 한 개, 아래로 연결되는 한 개, 왼쪽 섬과 연결되는 한 개의 다리가 있다.

그림



그래프



표

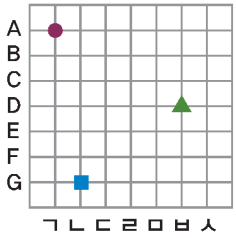
지점	연결된 다리의 수			
	A	B	C	D
A	0	2	2	1
B	2	0	0	1
C	2	0	0	1
D	1	1	1	0

▲ 정보의 다양한 구조화 방법 예시

예제 3 앞의 예제 ②에서 분해 방법 ②에 따라 분해한 문제를 모델링해 해결하기 쉬운 형태로 표현해 보자.

- 작은 문제 1: 가로 방향에서 한국이, 친구1, 친구2의 이동 거리의 합이 최소가 되는 지점을 구하는 문제
- 작은 문제 2: 세로 방향에서 한국이, 친구1, 친구2의 이동 거리의 합이 최소가 되는 지점을 구하는 문제
- 작은 문제 3: 가로, 세로 방향에서 각각 이동 거리의 합이 최소가 되는 지점이 만나는 위치를 구하는 문제

예제 2의 그림을 이용하세요!



● 한국이 ■ 친구1 ▲ 친구2

풀이 모델링을 통해 복잡해 보이는 문제를 다음과 같이 단순하게 표현할 수 있다.

방법 1 | 표 기반 모델링

가로 방향과 세로 방향으로 나누어 각 위치까지의 세 학생의 이동 거리와 이동 거리의 총합을 표 형태로 구조화해 표현할 수 있다.

가로 방향

	한국이 ●	친구1 ■	친구2 ▲	총 이동 거리	약속 장소
ㄱ	0	1	5	6	(ㄱ, ?) ← 초기 상태
ㄴ	1	0	4	5	(ㄴ, ?) ← 다음 상태
ㄷ	2	1	3	6	(ㄷ, ?)
ㄹ	3	2	2	7	(ㄹ, ?)
ㅁ	4	3	1	8	(ㅁ, ?)
ㅂ	5	4	0	9	(ㅂ, ?)
ㅅ	6	5	1	12	(ㅅ, ?)

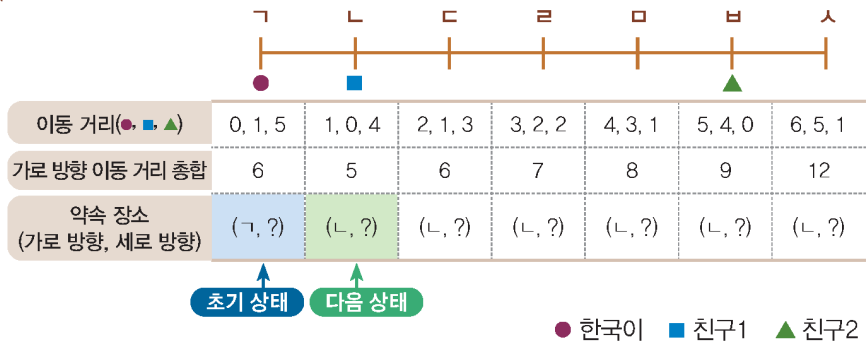
세로 방향

	한국이 ●	친구1 ■	친구2 ▲	총 이동 거리	약속 장소
A	0	6	3	9	(ㄴ, A)
B	1	5	2	8	(ㄴ, B)
C	2	4	1	7	(ㄴ, C)
D	3	3	0	6	(ㄴ, D)
E	4	2	1	7	(ㄴ, D)
F	5	1	2	8	(ㄴ, D)
G	6	0	3	9	(ㄴ, D) ← 목표 상태

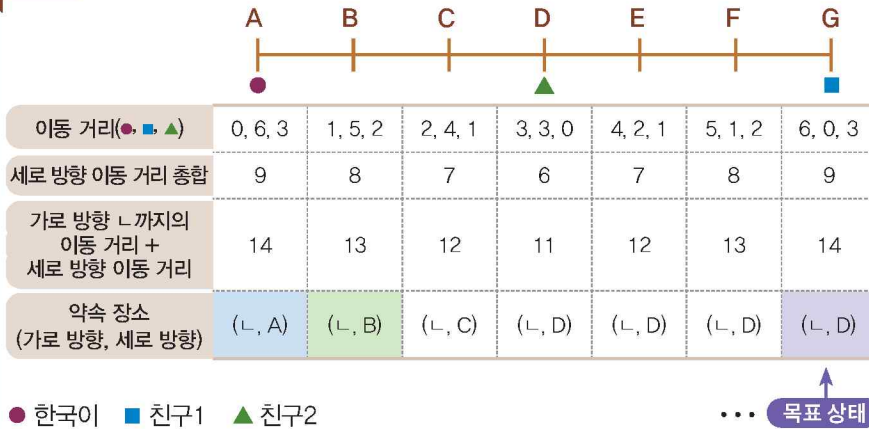
방법 2 | 이미지 기반 모델링

가로 방향과 세로 방향으로 나누어 각 학생의 출발 위치와 이동 거리, 그 총합을 그림으로 표현함으로써 문제를 이해하기 쉬운 형태로 나타낼 수 있다.

가로 방향



세로 방향



표와 이미지 기반 모델링을 통해 초기 상태부터 목표 상태까지의 변화를 나타내 확인할 수 있고, 세 학생이 이동한 거리의 총합이 최소가 되기 위한 약속 장소는 (L, D) 위치라는 것을 알 수 있다.

해 보기 2 모델링해 표현하기

다음 문제 상황에 나타난 문제를 이해하기 쉬운 형태로 모델링해 나타내 보자.

문제 상황 한국이 학교 앞 정류장에 정차하는 버스 A, B, C의 배차 간격은 각각 8분, 9분, 12분이다. 버스 A, B, C가 동시에 정류장에서 출발한 이후 처음으로 다시 3대의 버스가 동시에 출발하는 것은 몇 분 후일까?



소단원 요약

- 한 번에 해결하기 어려운 복잡한 문제를 해결하기 위해 작은 단위의 단순한 문제로 나누는 것을 문제 분해라고 한다.
- 복잡한 문제는 유사한 기능이나 자료를 기준으로 분해한 뒤 기능별로 순차적으로 처리하며 문제를 해결하거나, 동일한 형태의 작은 문제로 분해하여 작은 문제를 반복적으로 해결하며 원래의 문제를 해결할 수 있다.
- 글, 그림, 그래프, 표 등을 사용하여 작은 문제 사이의 관계를 구조화해 복잡한 문제를 이해하기 쉬운 형태로 나타내는 것을 모델링이라고 한다.

소단원 자기 평가

평가 항목	평가 기준		
	잘함	보통	노력
1. [지식이해] 문제 분해와 모델링을 적용하는 방법을 설명할 수 있다.			
2. [과정기능] 복잡한 문제를 작은 단위의 문제로 분해하고 해결하기 용이하도록 단순화나 구조화된 형태로 모델링할 수 있다.			
3. [가치태도] 문제 해결 모델을 구성하고 적극적으로 표현하려는 자세를 가질 수 있다.			



계단을 오를 수 있는 방법의 수

다음 문제 상황을 분석하고 모델링해 보자.

문제 상황 한 번에 한 계단 또는 두 계단씩 오를 수 있을 때, 다섯 개의 계단을 오를 수 있는 방법의 수를 구해 보자.



1 문제를 분석하고 핵심 요소와 수행 작업을 나열해 보자.

초기 상태	
목표 상태	
핵심 요소	
수행 작업	

2 문제를 해결하기 위해 작은 문제들로 분해하고, 그 결과를 작성해 보자.

3 문제를 분해한 결과를 바탕으로 해결하기 쉬운 형태로 모델링해 보자.

4 분해한 작은 문제를 모두 수행했을 때 원래의 문제가 올바르게 해결되는지 확인해 보자.

탐구 활동 자기 평가	평가 항목	평가 기준		
		잘함	보통	노력
	1. 복잡한 문제를 해결 가능한 작은 단위의 문제로 분해할 수 있는가?			
	2. 문제를 분해한 결과를 바탕으로 모델링할 수 있는가?			

• 잘함 (내용을 이해하고 설명함) • 보통 (내용을 이해함) • 노력 (내용을 부분적으로 이해함)

쿤히스베르크의 다리 건너기

쿤히스베르크의 다리 건너기 문제는 프로이센의 쿤히스베르크(현재의 러시아 칼리닌그라드라는 도시)에 있는 7개의 다리에 관련된 문제다.

프레겔 강에 두 개의 섬과 도시의 나머지 부분을 연결하는 7개의 다리가 있을 때, 임의의 지점에서 출발하여 일곱 개의 다리를 한 번씩만 건너서 처음 시작한 위치로 돌아오는 방법을 찾는 문제다.

1735년에 오일러(Leonhard Paul Euler)가 가장 처음으로 이 문제에 답이 없다는 것을 증명하였는데, 증명 과정에서

쿤히스베르크의 복잡한 지형과 길, 다리 등의 여러 조건을 선과 점으로 단순화하여 도식화했다. 다시 말해 모델링 과정을 거친 후 이 문제를 풀었음을 확인할 수 있다. 이러한 오일러의 스케치는 그래프 구조의 원형이 되었다.

오일러의 스케치에서 섬과 도시를 나타내는 A부터 D까지를 정점이라고 하며, 다리를 나타내는 a부터 g까지를 간선이라고 한다. 오일러는 그래프의 어떤 정점에서 시작하여 펜을 떼지 않고 모든 간선을 한 번씩만 지나서 처음 시작한 정점으로 되돌아오는 경로를 가지려면 각 정점에 연결된 간선의 개수가 모두 짝수이어야 한다는 사실을 증명했다. 그리고 그러한 경로를 '오일러 경로'(Eulerian Trail) 또는 '한붓그리기'라고 한다.

